Estudo Dirigido - Condutividade térmica variável - Meios Contínuos - 1/2019

Prof. Rafael Gabler Gontijo - Unicamp

7 de maio de 2019

Uma barra unidimensional de material metálico de comprimento L encontra-se vinculada a dois extremos de temperatura. As condições de contorno são dadas por $T(0) = T_1$ e $T(L) = T_2$. O modelo esquemático explorado nessa questão encontra-se representado na figura (1). Seu desafio consiste em de-

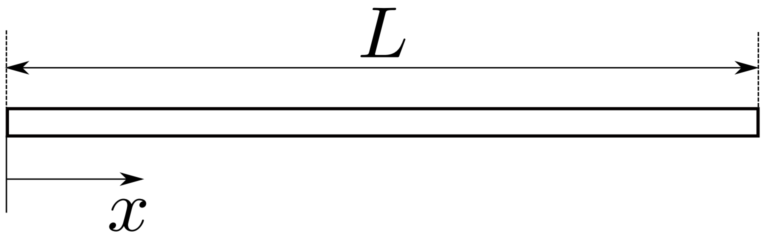


Figura 1: Representação esquemática da geometria abordada no problema

duzir uma expressão analítica (exata) para a distribuição de temperatura ao longo da barra na condição de regime permanente, sem geração interna, porém para o caso de condutividade térmica variável ao longo do espaço devido a variações de temperatura. A partir de sua expressão teórica, numericistas terão uma nova relação para validarem códigos computacionais que visem explorar problemas de transferência de calor em sistemas físicos nos quais a condutividade térmica não pode ser assumida como uma constante. Seu ponto de partida será a equação geral da condução/difusão de calor:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k\nabla T) + \dot{q}. \tag{1}$$

Baseado na equação (1) responda os itens a seguir:

- (A) A fim de buscarmos um modelo para expressar o comportamento de $k(x)$, consideremos a lei de Wiedemann-Franz-Lorenz, que relaciona a condutividade elétrica, k_e, com a condutividade térmica, k, em sólidos metálicos, dada por:

  $$\frac{k}{k_e} = LT,$$

  em que L é uma constante, denominada constante de Lorenz. Utilizando esta lei em conjunto com a equação geral da condução de calor e seus conhecimentos matemáticos sobre a regra da cadeia, mostre que em regime permanente unidimensional a equação (1) se torna:

  $$\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + T\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k_e L} = 0 \tag{2}$$

  Você precisará resolver a equação (2) no limite assintótico em que $\dot{q} \to 0$. Essa solução envolverá uma série de passos que você deverá seguir ao longo dos itens dessa questão. **NOTA:** Seja $\boldsymbol{a}$ um vetor e b um escalar, então $\nabla \cdot (\boldsymbol{a}b) = b\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \nabla b$, além disso $\nabla \cdot \nabla b = \nabla^2 b$;

- (B) Inicialmente, tratemos T como uma variável independente. Para isso, faça $f(T) = \frac{dT}{dx}$ e mostre que a equação (2) na ausência de geração interna pode ser expressa por:

  $$f^2 + Tf\frac{df}{dT} = 0; \tag{3}$$

- (C) Coloque agora f em evidência e note que você terá duas soluções possíveis para a equação diferencial (3). Uma delas ($f = 0$) não faz sentido físico, logo estamos buscando a solução para a equação diferencial expressa em parênteses após o processo de colocarmos f em evidência na equação (3). Divida essa equação por f e integre os dois lados com respeito a T para mostrar que a solução que buscamos para f é dada por:

$$f(T) = \frac{\exp(C_1)}{T}, \tag{4}$$

em que C_1 é uma constante de integração;

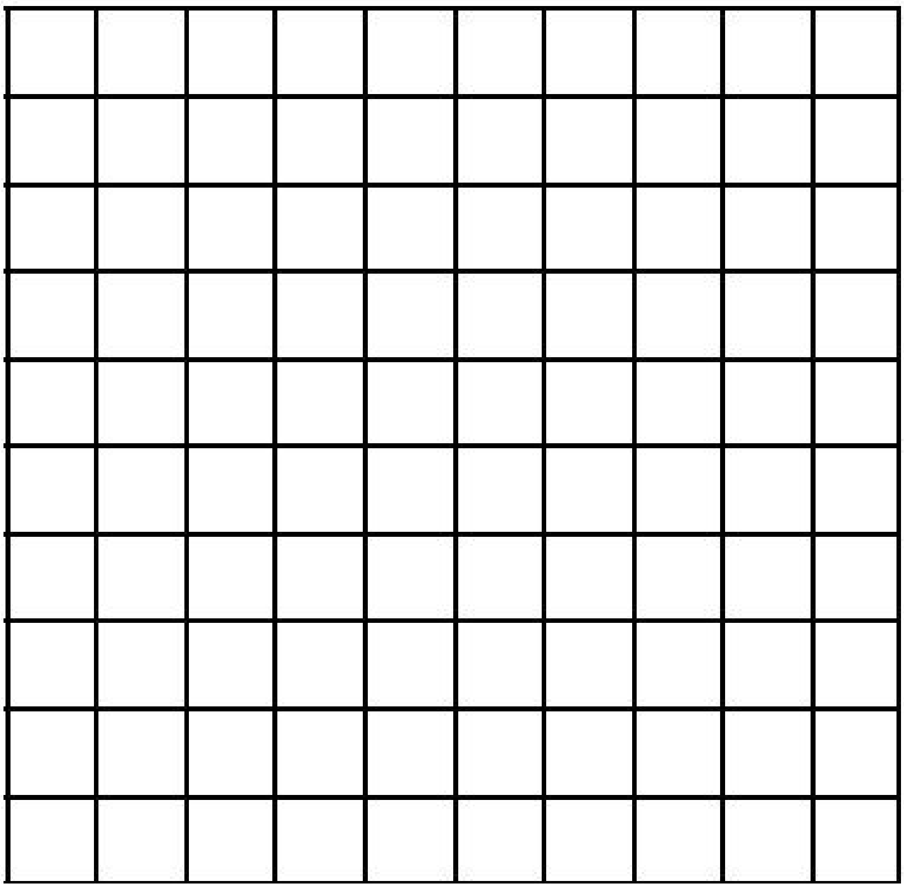
- (D) Substitua agora em (4) a expressão que relaciona $f(T)$ proposta no item B. Em seguida integre os dois lados com relação a x e chame $\exp(C_1)$ de C_1, dado que essa constante ainda não foi determinada. Ao final desse processo você deverá mostrar que:

$$T(x) = \sqrt{2\left(C_1 x + C_2\right)}; \tag{5}$$

- (E) Aplique as condições de contorno para determinar as constantes C_1 e C_2 para mostrar finalmente que:

$$T(x) = \sqrt{\frac{T_2^2 x + T_1^2\left(L - x\right)}{L}} \tag{6}$$

- (F) Obtenha a expressão para $T(x)$ para o caso no qual k é constante. Considere agora $L = 1m$, $T_1 = 150K$ e $T_2 = 50K$ e plote no papel milimetrado abaxio as curvas para $T(x)$ para os dois casos. Você deverá utilizar 10 pontos nesse intervalo, círculos preenchidos ($\bullet$) para o caso 1 (k constante) e o símbolo ($\times$) para o caso 2 (k variável). Use a figura abaixo para a confecção de seus gráficos.



- (G) Procure agora uma solução para o caso no qual o mecanismo de geração interna não é desprezível. Plote suas soluções $T(x)$ em função de diferentes intensidades do parâmetro:

$$\frac{\dot{q}}{k_e L}$$