Lista 3 - EM670 - Turma R

Prof. Rafael Gabler Gontijo

23 de abril de 2019

Questão 01

Considere a figura esquemática ilustrada abaixo e com base nela desenvolva os itens a seguir.

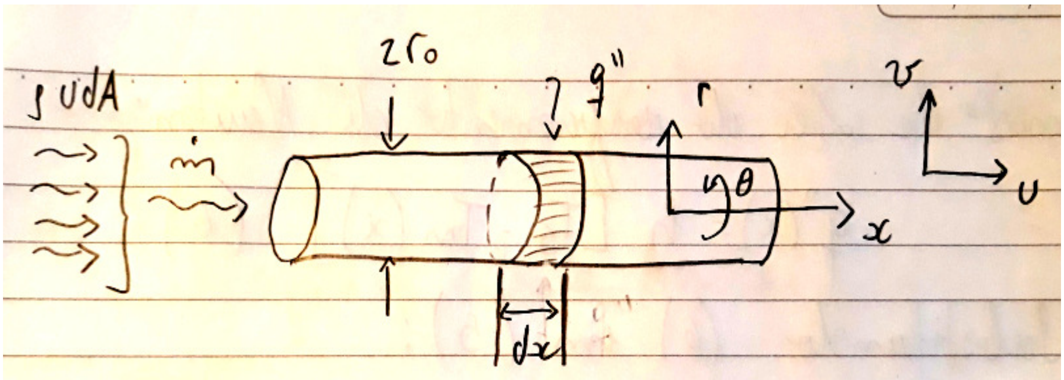

Figura 1: Figura esquemática de um escoamento no interior de um duto cilíndrico.

- a - Através de um balanço de energia no elemento infinitesimal de área superficial $dA_s = 2\pi r_0 dx$, mostre que a temperatura média do escoamento no interior do duto varia na direção x de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2q''}{r_0 \rho C_p U}, \tag{1}$$

em que U é a velocidade média do escoamento no interior do duto. Considere nesse item um modelo de gás ideal no qual $dh = C_p dT_m$, em que dh representa a variação infinitesimal da entalpia do fluido conforme esse escoa na direção x.

- b - Considere agora a equação da energia, num contexto sem geração interna e sem efeitos de produção de energia interna por dissipação viscosa, dada por

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T, \tag{2}$$

mostre que na condição de escoamento hidrodinamicamente desenvolvido, em coordenadas cilíndricas e num contexto de simetria com relação ao eixo axial (as grandezas de campo não variam na direção θ), a equação (2) é dada por

$$\frac{u(r)}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3}$$

- c - Os termos da equação (3) são interpretados de acordo com o seguinte grupo de mecanismos físicos que regem a dinâmica térmica do escoamento:

  1. $\frac{u(r)}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow$ convecção
  2. $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow$ condução radial
  3. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow$ condução axial

  Da equação (1) considere a seguinte escala típica para $\partial T/\partial x \sim q''/(D\rho C_p U)$, além das seguintes escalas para os outros termos: $u(r) \sim U$, $\partial^2 T/\partial r^2 \sim (1/r)\partial T/\partial r \sim \Delta T/D^2$ e $\partial^2 T/\partial x^2 \sim q''/(D\rho C_p U L)$. Com base nessas escalas, mostre que os mecanismos físicos da equação (3) possuem as seguintes escalas características:

  1. convecção $\sim Nu$
  2. condução radial ~ 1
  3. condução axial $\sim \frac{Nu}{Pe}\left(\frac{D}{L}\right)$,

  em que $Nu = hD/k$ e $Pe = UD/\alpha$ são os números de Nusselt e de Péclet respecticamente. Mostre ainda que no limite em que $D/L \ll 1$ e/ou $Pe \gg 1$ os termos de condução axial são muito menores que os termos de condução radial e que a equação da energia se torna simplesmente:

  $$\frac{u(r)}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{4}$$

- d - Considere agora um contexto de um escoamento sujeito à condição de fluxo de calor constante q_s'' pela parede e termicamente desenvolvido. A condição de um escoamento termicamente desenvolvido consiste no cenário no qual o campo de temperatura adimensional ϕ, dado por

  $$\phi = \frac{T_s - T}{T_s - T_m} = f(r/r_0). \tag{5}$$

  Se a lei do resfriamento de Newton no contexto de um escoamento interno é dada por $q_s'' = h\,(T_s - T_m)$, mostre que para um escoamento termicamente desenvolvido, sujeito à condição de fluxo de calor constante imposto pela parede, as seguintes relações são satisfeitas:

  $$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx}. \tag{6}$$

- e - Considere que na região de escoamento termicamente desenvolvido o perfil de velocidades também encontra-se hidrodinamicamente desenvolvido, de tal sorte que este é dado por:

  $$\frac{u(r)}{2U} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{7}$$

  Utilizando as equações (1), (5), (6), (7) em (4), mostre após certa manipulação algébrica que o campo de temperatura adimensional $\phi(r)$ para a condição de escoamento termicamente desenvolvido é regido pela seguinte equação diferencial ordinária:

  $$\frac{1}{r^*}\frac{d}{dr^*}\left(r^*\frac{d\phi}{dr^*}\right) = -2Nu\left(1 - r^{*2}\right). \tag{8}$$