Camada Limite

↳ Século XX

- Navier (1823), Poisson (1831), Saint Venant (1843), Stokes (1845)

↳ Eq. de Navier-Stokes

- 1845 → Stokes → no-slip → esfera ⤳ escoamentos

Não batia com experimentos ⟵ lentos

- 1851 -> Stokes adota de vez a hipótese de não escorregamento -> Novos experimentos p/ escoamento em duto que comprovaram seus cálculos
- 1864 -> Rankine -> formula conceitos preliminares vinculados às ideias futuras de camada limite
- 1872 -> Froude -> experimentos que mostram maior atrito nas porções iniciais de uma placa sujeita a um escoamento

- 1880 → Mendeleyev → "On the resistance of fluids and the problem of flight"

- 1881 → Lorenz assume a condição de não escorregamento → convecção natural em placa plana vertical → eq. da energia → condução e convecção

- 1888 → Enciclopédia Britânica → hidrodinâmica × hidráulica

- 1895 → Osborne Reynolds ⇝ "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous fluids and the Determination of the Criterion"

- 1904 → Prandtl ⇝ "On the motion of a fluid with very small viscosity"

Nesse artigo Prandtl lança as seguintes ideias:

1- As questões mais importantes p/ um fluido de $\mu << 1$ parecem ocorrer na parede

2- O escoamento é quase irrotacional, exceto em uma pequena região próxima à parede

3- Nessa região o escoamento está sujeito à intensos gradientes numa fina camada

4 - Quanto menor a viscosidade mais fina será esta camada de transição

5 - Intensos gradientes compensavam a baixa viscosidade $\rightsquigarrow$

$$\underbrace{\nu}_{\ll 1} \, \underbrace{\nabla^2 \underset{\sim}{v}}_{\gg 1} \sim \underset{\sim}{v} \cdot \nabla \underset{\sim}{v}$$

6 - A espessura desta camada $\sim \sqrt{\nu}$

7- Em alguns casos essa camada pode se separar da superfície devido ao escoamento externo

8- Estima a dependência funcional da força de atrito na parede

- 1907 → Lanchester estima a mesma dependência funcional p/ força de atrito → sem citar o trabalho de Prandtl

• 1908 -> Blasius (aluno do Prandtl) resolve o escoamento de C.L. sobre placa plana infinita por similaridade

• 1910 -> Prandtl aplica sua ideia a problemas térmicos

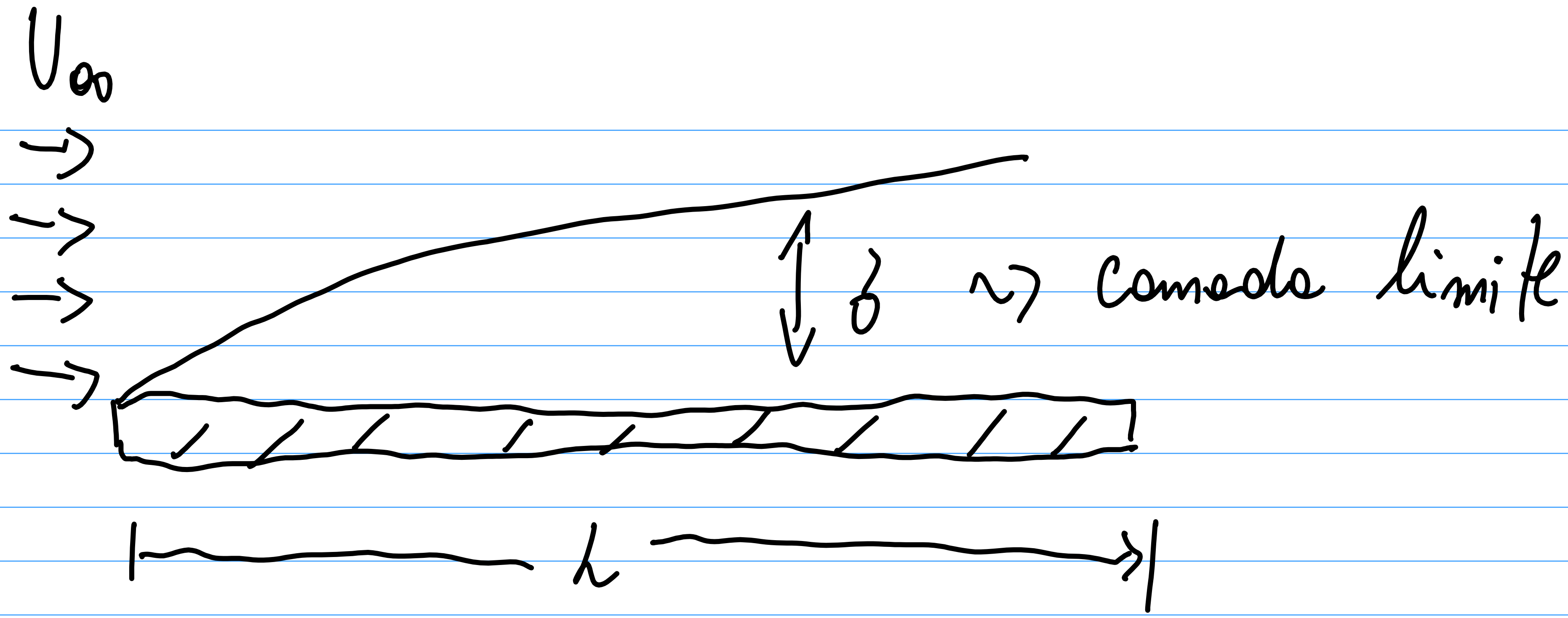
• 1911 ~> Rayleigh faz as mesmas estimativas p/ força de arrasto sem citar o Prandtl

• 1914 → Prandtl explica as mudanças de comportamento p/ escoamento em torno de uma esfera em função de Re → baseado em observações experimentais feitas por Eiffel (1912)

• 1916 → Zhukovskii faz menção à ideia de C.L sem citar o Prandtl

- 1914 - 1918 → Primeira Guerra Mundial

- 1921 ⇝ Karman propõe a integração das eq. de Prandtl
- 1921 ⇝ Pohlhausen assume alguns perfis típicos de velocidade ⇝ Soluções Integrais de Karman-Pohlhausen
- 1924 → Lamb cita a teoria da Camada limite no seu livro: "Hydrodynamics"



· Escoamento 2D, permanente, incompressível :

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Big\} \quad \underset{\sim}{v}(x,y)=u\,\hat{e}_x+v\,\hat{e}_y$$

$f(x,y)$

$$(2) \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$(3) \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - g$$

Considere: $\boxed{\delta \ll L}$

Análise de escala $\rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} x \sim L \;; & y \sim \delta \\ u \sim U_\infty \;; & P \sim \rho U_\infty^2 \end{array}}$ (4)

De (1): $$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{U_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta}$$

$$\boxed{v \sim U_\infty \frac{\delta}{L}}$$

Analisando (2) e (3):

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{U_\infty^2}{L}\quad \frac{U_\infty \delta}{L}\frac{U_\infty}{\delta}}=\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\rho U_\infty^2}{L}}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\nu U_\infty/L^2 \ll \underbrace{\nu U_\infty/\delta^2}_{\text{Domina}}$$

$$\text{Inércia}|_x \sim \frac{U_\infty^2}{L}$$

$$\text{Pressão}|_x \sim \frac{U_\infty^2}{L}$$

$$\text{Atrito}|_x \sim \frac{\nu U_\infty}{\delta^2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - g$$

$$\underbrace{U_\infty^2 \frac{\delta}{L^2} \qquad \frac{U_\infty^2}{\cancel{\delta}}\frac{\cancel{\delta^2}}{L^2}}_{} \qquad \frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{\cancel{\rho} U_\infty^2}{\delta} \qquad \frac{\nu U_\infty \delta}{L^3} \qquad g$$

$$\frac{\nu U_\infty \cancel{\delta}}{L\,\delta^{\cancel{2}}}$$

$$\text{Inércia}|_y \sim \frac{U_\infty^2 \delta}{L^2}$$

$$\text{Pressão}|_y \sim \frac{U_\infty^2}{\delta}$$

$$\text{Atrito}|_y \sim \frac{\nu U_\infty}{L\delta}$$

$$\frac{\text{Inércia}_{,x}}{\text{Inércia}_{,y}} \sim \frac{V_\infty^2}{\cancel{L}} \frac{L^{\cancel{2}}}{V_\infty^2 \delta} \sim \frac{L}{\delta} \gg 1$$

$$\frac{\text{Atrito}_{,x}}{\text{Atrito}_{,y}} \sim \frac{\cancel{\nu} V_\infty}{\delta^{\cancel{2}}} \times \frac{L \cancel{\delta}}{\cancel{\nu} V_\infty} \sim \frac{L}{\delta} \gg 1$$

$$\frac{\text{Pressão}_{,x}}{\text{Pressão}_{,y}} \sim \frac{V_\infty^2}{L} \times \frac{\delta}{V_\infty^2} \sim \frac{\delta}{L} \ll 1$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g}$$

Essa análise preliminar leva às seguintes simplificações:

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \qquad \boxed{\frac{\delta}{L}\sim Re_L^{-1/2}}$$

$$\downarrow$$

Convecção $\sim$ Difusão

$$\downarrow$$

$$\frac{U_\infty^2}{L}\sim\frac{\nu U_\infty}{\delta^2}\rightarrow\frac{\delta^2}{L^2}\sim\frac{\nu \cancel{L}}{L^{\cancel{2}}U_\infty}\sim Re_L^{-1}$$

convecção $\longrightarrow$

flow

$t_c \sim \frac{L}{U_\infty}$

Difusão $\rightsquigarrow$ $\underbrace{t_d \sim L^2 \nu^{-1}}$

U_∞ $\quad |\longleftarrow L \longrightarrow|$

$t_d \sim \frac{L^2}{\nu}$

$$\boxed{\frac{t_d}{t_c} \sim \frac{L^2}{\nu} \times \frac{U_\infty}{L} \sim \frac{U_\infty L}{\nu} \sim Re_L}$$