

# Transferência de Calor I

## Trabalho computacional - solução da Equação de difusão de Calor

Prof: Rafael Gabler Gontijo  
Ciro Fraga Alegretti

5 de novembro de 2018

### Resumo

O presente roteiro tem como objetivo a apresentação e dedução de aspectos teóricos e numéricos que possibilitem a solução da Equação de difusão de calor. A equação governante do problema será discretizada por meio do Método das Diferenças Finitas, condições de contorno apropriadas serão definidas e uma proposta de algoritmo de solução será apresentada. Ao fim deste documento, todas as ferramentas necessárias para a implementação numérica do problema proposto terão sido apresentadas.

## 1 Introdução

O problema abordado nesta proposta de trabalho computacional consiste no cálculo do campo de temperatura resultante em uma placa metálica sujeita a um processo de soldagem. Considere a equação transiente da difusão de calor, que com geração interna de energia pode ser expressa como

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k}, \quad (1)$$

em que  $\alpha$  representa a difusividade térmica do meio,  $k$  a condutividade térmica do meio,  $T$  o campo de temperatura,  $t$  a variável tempo,  $\nabla^2$  o operador escalar Laplaciano e  $\dot{q}$  a taxa de geração volumétrica de energia. Desta forma, a contribuição energética associada à soldagem sobre o sistema pode ser modelada como um termo de geração interna ( $\dot{q}$ ) atuando localmente em um único ponto do espaço, cuja posição varia ao longo do tempo. As condições

de contorno adotadas são provenientes do balanço energético nas interfaces, de forma que o calor conduzido seja dissipado por convecção para o meio externo. A partir da Lei do Resfriamento de Newton e da Lei de Fourier para a condução, tem-se:

$$q''|_{int} = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_i - T_\infty), \quad (2)$$

em que  $n$  representa a orientação do vetor área da interface (direção  $x$  ou  $y$  no caso de um domínio retangular)

A figura 1 ilustra o problema apresentado.

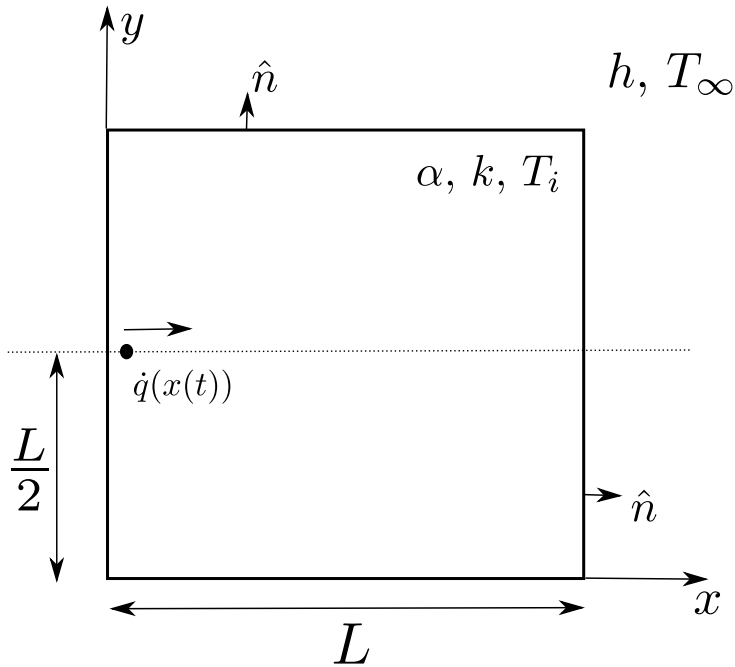


Figura 1: Trajetória do ponto de solda ao longo da chapa metálica (geração interna ao longo do domínio computacional).

A solução do campo de temperaturas deverá ser conduzida de forma adimensional, cuja temperatura  $\theta$  associada é dada por:

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad (3)$$

$$\rightarrow T(t) = \theta \Delta T + T_\infty, \quad (4)$$

com  $\Delta T = T_i - T_\infty$ , de forma que

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla^2 T = \Delta T \nabla^2 \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial n}. \quad (7)$$

A partir das escalas características do problema ( $x \sim L$ ,  $y \sim L$ ,  $t \sim L^2/\alpha$ ,  $\nabla \sim 1/L$ ,  $\nabla^2 \sim 1/L^2$ ), define-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} t^* &= t \frac{\alpha}{L^2}; x^* = \frac{x}{L}; y^* = \frac{y}{L}; \\ \nabla^* &= L \nabla; \nabla^{2*} = L^2 \nabla^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (5), (6) e (8) em (1), obtém-se a Equação da condução de calor na forma adimensional:

$$\frac{\Delta T}{\alpha} \frac{\alpha}{L^2} \frac{\partial \theta}{\partial t^*} = \frac{\Delta T}{L^2} \nabla^{2*} \theta + \frac{\dot{q}}{k} \quad (9)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta + \frac{L^2}{\Delta T k} \dot{q}. \quad (10)$$

Definindo a geração interna adimensional  $\dot{q}_{ad}$ :

$$\dot{q}_{ad} = \frac{L^2}{\Delta T k} \dot{q}, \quad (11)$$

pode-se escrever a equação governante do problema de forma simplificada na forma

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta + \dot{q}_{ad}}. \quad (12)$$

De forma análoga ( $n \sim L$ ) e inserindo (7) em (2), tem-se as condições de contorno do problema na forma adimensional:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_i - T_\infty) \quad (13)$$

$$-k \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial n} = h \Delta T \quad (14)$$

$$-\frac{k}{L} \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial n^*} = h \Delta T \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{Lh}{k}. \quad (16)$$

Desta forma, a variação de temperatura nas interfaces do domínio é função da razão entre as resistências de condução no interior do sólido e de convecção na sua superfície. Tal razão representa a definição do número de Biot, de forma que as condições de contorno do problema são dadas por:

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial n} = -Bi} \quad (17)$$

Na seção a seguir serão propostos esquemas de discretização para a solução da equação governante (12) e para as condições de contorno.

## 2 Discretização: Método das Diferenças Finitas

Um dos primeiros métodos numéricos aplicados à solução aproximada de equações diferenciais é o chamado método das diferenças finitas. Um ponto comum entre os métodos existentes é o fato de que o primeiro passo do processo de solução consiste em uma discretização do domínio de cálculo da solução. A figura (2) mostra um exemplo da discretização de um domínio de cálculo retangular.

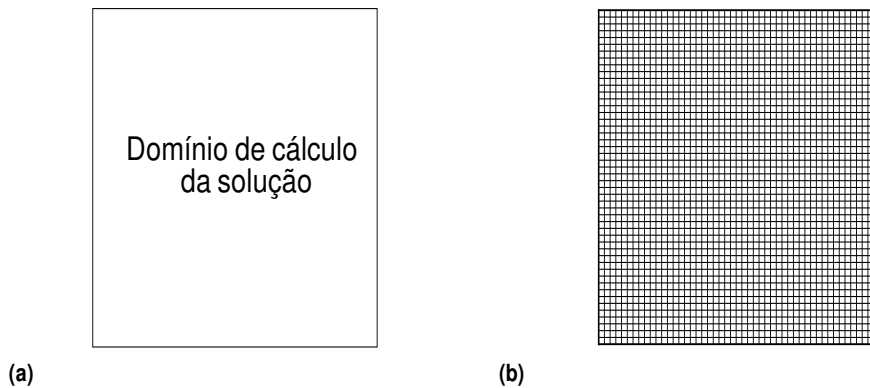


Figura 2: Domínio de cálculo contínuo (a) e domínio discretizado através de uma malha contendo 2500 nós

A transformação de termos associados a derivadas de ordem  $n$  em termos algébricos através de expansões em séries de Taylor em torno de um nó central arbitrário da malha de cálculo é feita da seguinte maneira. Considere uma

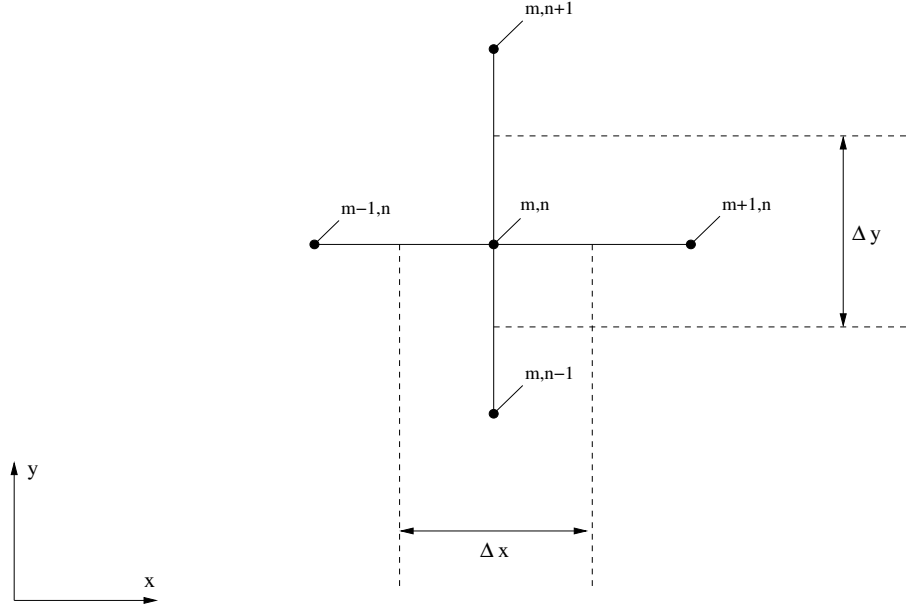


Figura 3: Ampliação de um nó interno em uma malha bidimensional

malha de cálculo bidimensional, em que um nó interno arbitrário possui a numeração ilustrada na figura (3).

Uma expansão em série de Taylor para determinar as temperaturas nos nós  $m+1, n$ ,  $m-1, n$ ,  $m, n+1$  e  $m, n-1$  em termos de seu valor no nó central  $m, n$  fornece

$$\theta_{m+1,n} = \theta_{m,n} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (18)$$

$$\theta_{m-1,n} = \theta_{m,n} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (19)$$

$$\theta_{m,n+1} = \theta_{m,n} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + O(\Delta y^3) \quad (20)$$

$$\theta_{m,n-1} = \theta_{m,n} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + O(\Delta y^3), \quad (21)$$

utilizando o argumento de que termos ordem  $\Delta x^2$  e  $\Delta y^2$  são muito pequenos, dado que as dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$  já constituem grandes de pequena ordem, podemos truncar a série infinita expressa nas equações (18) a (21), considerando apenas termos ordem  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Note que este procedimento leva a uma solução aproximada da equação governante do problema. De fato a

medida que mais nós são adicionados à malha de cálculo, a tendência é a obtenção de uma solução aproximada mais próxima da realidade física que se pretende simular. Procedendo desta forma têm-se que

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{m+1/2,n} \approx \frac{\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{m-1/2,n} \approx \frac{\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{m,n+1/2} \approx \frac{\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n}}{\Delta y} \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{m,n-1/2} \approx \frac{\theta_{m,n} - \theta_{m,n-1}}{\Delta y}, \quad (25)$$

a obtenção de termos envolvendo derivadas de segunda ordem depende das derivadas de primeira ordem expressas nas equações (22) a (25) e pode ser dada por

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{m+1/2,n} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{m-1/2,n}}{\Delta x} \approx \frac{\theta_{m+1,n} + \theta_{m-1,n} - 2\theta_{m,n}}{\Delta x^2} \quad (26)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{m,n+1/2} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{m,n-1/2}}{\Delta y} \approx \frac{\theta_{m,n+1} + \theta_{m,n-1} - 2\theta_{m,n}}{\Delta y^2}. \quad (27)$$

A discretização de termos de derivada temporal segue o mesmo raciocínio, de modo que

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{m,n} \approx \frac{\theta_{m,n}^{p+1} - \theta_{m,n}^p}{\Delta t}, \quad (28)$$

neste caso o índice superior  $p$  denota o instante de tempo anterior, enquanto o índice  $p + 1$  denota o valor da temperatura no instante atual. Tendo determinado as expressões para os termos associados às derivadas espaciais e temporais que surgem na equação da difusão de calor, é possível escrever esta EDP em sua forma discretizada. Tendo em mente que para um domínio de cálculo bidimensional a equação (12) é escrita como

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \dot{q} \quad (29)$$

Utilizando as derivadas expressas nas equações (26), (27) e (28), a equação (29) é escrita em sua forma discretizada como

$$\frac{\theta_{m,n}^{p+1} - \theta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\theta_{m+1,n}^r + \theta_{m-1,n}^r - 2\theta_{m,n}^r}{\Delta x^2} + \frac{\theta_{m,n+1}^r + \theta_{m,n-1}^r - 2\theta_{m,n}^r}{\Delta y^2} + \dot{q}_{m,n}. \quad (30)$$

Note que o índice superior referente ao instante de tempo em que os termos do lado direito da equação são considerados foi definido de forma arbitrária na equação (30) como  $r$ . Na verdade existem três opções para o instante de tempo em que se deseja avaliar estes termos. Na formulação a ser utilizada no presente contexto, o índice  $r$  será feito igual a  $p$ , isto implica que a solução do valor da temperatura em cada nó evoluirá no tempo de acordo com os valores das temperaturas dos nós vizinhos em um instante de tempo anterior. Desta forma para simplificar a equação (30) antes de prosseguir, vamos considerar neste momento uma malha de cálculo na qual  $\Delta x = \Delta y$  e isolar o termo  $\theta_{m,n}^{p+1}$ . Procedendo desta maneira obtém-se

$$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\theta_{m+1,n}^p + \theta_{m-1,n}^p - 4\theta_{m,n}^p + \theta_{m,n+1}^p + \theta_{m,n-1}^p + \Delta x^2 \dot{q}_{m,n}) \quad (31)$$

A partir do critério de estabilidade para as discretizações espaciais e temporais adotadas (centrada de segunda ordem no espaço e atrasada de primeira ordem no tempo) do domínio bidimensional, tem-se que:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (32)$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4} \quad (33)$$

A equação (31) traz a seguinte informação: o valor da temperatura de um nó interno arbitrário no instante de tempo atual pode ser determinado através dos valores das temperaturas dos nós vizinhos e de seu próprio valor avaliados em um instante de tempo anterior, e da taxa de geração interna no nó em questão no tempo atual. De forma análoga, a partir das aproximações espaciais de primeira ordem para primeira derivada nas equações de (22) a (25), pode-se obter as condições de contorno na forma discretizada. Exemplificando a metodologia para a lateral esquerda do domínio ( $x = 0$ ):

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -Bi \quad (34)$$

$$\frac{\theta_{0,n} - \theta_{1,n}}{\Delta x} = -Bi \quad (35)$$

$$\theta_{0,n} = -Bi\Delta x + \theta_{1,n} \quad (36)$$

A partir de (36) e de equações análogas para as outras faces, a variação de temperatura adimensional  $\theta$  será atualizada nos nós do contorno do domínio a cada iteração afim de garantir a condição de contorno considerada e representada pela equação (2).

## 2.1 Implementação Numérica e objetivos

Para a solução do problema proposto, o deslocamento do ponto de solda será modelado pela geração interna em um único nó (cuja posição será deslocada ao longo do domínio a cada iteração no loop principal da solução, representando assim um movimento na fonte de calor). Informações complementares serão apresentadas nesta seção baseadas no domínio numérico adimensional ilustrado pela figura 4.

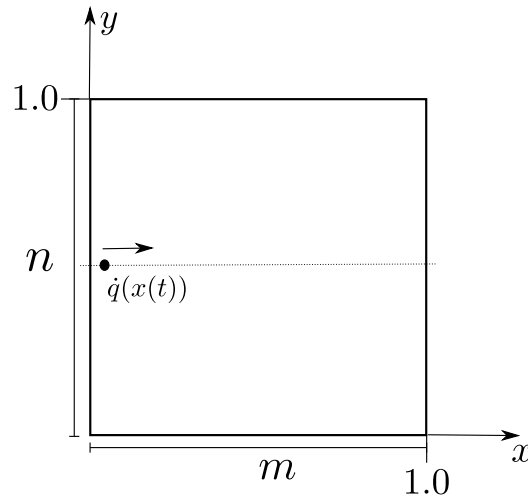


Figura 4: Ilustração do domínio computacional adimensionalizado.

As condições de contorno para  $\theta$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \theta[0, :] &= -Bi\Delta x + \theta[1, :] && \text{(Face esquerda)} \\
 \theta[m, :] &= -Bi\Delta x + \theta[m - 1, :] && \text{(Face direita)} \\
 \theta[:, 0] &= -Bi\Delta y + \theta[:, 1] && \text{(Face inferior)} \\
 \theta[:, n] &= -Bi\Delta y + \theta[:, n - 1]. && \text{(Face superior)}
 \end{aligned}$$

Afim de auxiliar o aluno na implementação do código computacional, segue abaixo uma proposta do algoritmo que você pode utilizar para confeccionar seu código. É importante salientar que o aluno pode elaborar seu próprio algoritmo e escrever seu programa em qualquer linguagem.



## Algoritmo

---

### (1) Pré-processamento

- Declaração de variáveis;
- Definição de parâmetros como:  $nx, ny, \dot{q}, Bi$
- Confeção da malha:  
 $x = np.linspace(0, 1.0, nx)$   
 $y = np.linspace(0, 1.0, ny)$
- Cálculo de  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta t$ ;
- Imposição das condições iniciais para  $\theta$  (campo nulo) e posição inicial de  $\dot{q}$ ;

### (2) Calcula o campo de temperatura

- Copiar os valores de  $\theta$  (condição inicial ou iteração anterior);
- Calcular as condições de contorno a partir do campo de temperatura na iteração anterior por meio da equação (36) e análogas;
- Calcular o campo de temperatura nos nós internos por meio da equação (31).
- Calcular resíduo:  $res = \max |\theta - \theta_{old}|$ ;

### (3) Se erro > tolerancia

- Volta ao passo 2;

### (4) Se erro < tolerancia

- Armazena a solução final do campo de temperatura para esta posição de  $\dot{q}$ ;
- Vai para o passo 5;
- **Avançar a posição de  $\dot{q}$  para o próximo nó horizontalmente**

### (6) Enquanto posição de $\dot{q} \leq nx$

- Volta ao passo 2;

### (7) FIM

---

## 2.2 Detalhamento dos objetivos

Você deverá escrever um código em qualquer linguagem de programação que calcule o campo de temperatura. Abaixo segue uma lista numerada dos objetivos individuais.

1. Fornecer soluções para  $Bi = 0.01$  e  $Bi = 0.001$  (ambas para  $\dot{q} = 1000.0$ ) apresentando gráficos da distribuição de temperatura em quatro instantes intermediários de cada caso (ou gerar uma animação da solução em todos os instantes);
2. Apresentar curvas de temperatura ( $\theta$  vs  $x$ ) sobre a linha central da placa por onde a geração interna passou (nos mesmos 4 instantes intermediários do item anterior);
3. Calcular as derivadas das curvas obtidas no item anterior e apresentar em um gráfico  $d\theta/dx$  vs  $x$ ;
4. Discutir e apresentar os resultados obtidos na forma de um relatório, anexando a rotina computacional desenvolvida.