

Estudo Dirigido 1 - Um modelo microestrutural reológico do sangue

Prof: Rafael Gabler Gontijo

March 25, 2019

1 Introdução

Escoamentos confinados no interior de dutos e tubulações estão presentes em inúmeras situações de aplicação prática de engenharia, bem como em fenômenos naturais e biológicos. Um engenheiro da indústria do petróleo por exemplo, precisa entender a física básica de escoamentos no interior de tubulações para dimensionar uma bomba capaz de levar o petróleo de um ponto a outro no espaço. Muitas vezes os caminhos que o fluido percorre passam por quilômetros de dutos, alterando a elevação do fluido ao longo do caminho, fazendo curvas, interagindo com acessórios de tubulação como válvulas, flanges, cotovelos redutores, entre outros. Cada curva, cada metro de tubulação reta, cada subida e descida, alteram a energia que o fluido contém e geralmente consomem energia cinética do fluido, que para continuar se alimentando precisa de uma injeção externa de energia contínua oriunda de uma bomba por exemplo.

A física por trás dos mecanismos que levam à dissipação de energia cinética por ação da viscosidade é intrincada e complexa. A título de curiosidade já se demonstrou experimentalmente que a adição de pequenas partes por milhão (p.p.m) de polímeros de alto peso molecular na água é capaz de diminuir em até 65% o arrasto de um escoamento interno. Esta diminuição ocorre apenas em escoamentos turbulentos porque as macromoléculas tendem a se esticar na direção do escoamento e este mecanismo inibe as flutuações turbulentas do escoamento em outras direções, fazendo com que menos energia cinética útil do fluido seja dissipada de forma não construtiva para alimentar vórtices turbulentos indesejados.

Escoamentos em dutos também servem como ótimos modelos de escoamentos sanguíneos. Do ponto de vista científico o escoamento do sangue na complexa rede de dutos que constitui a nossa circulação possui uma mecânica

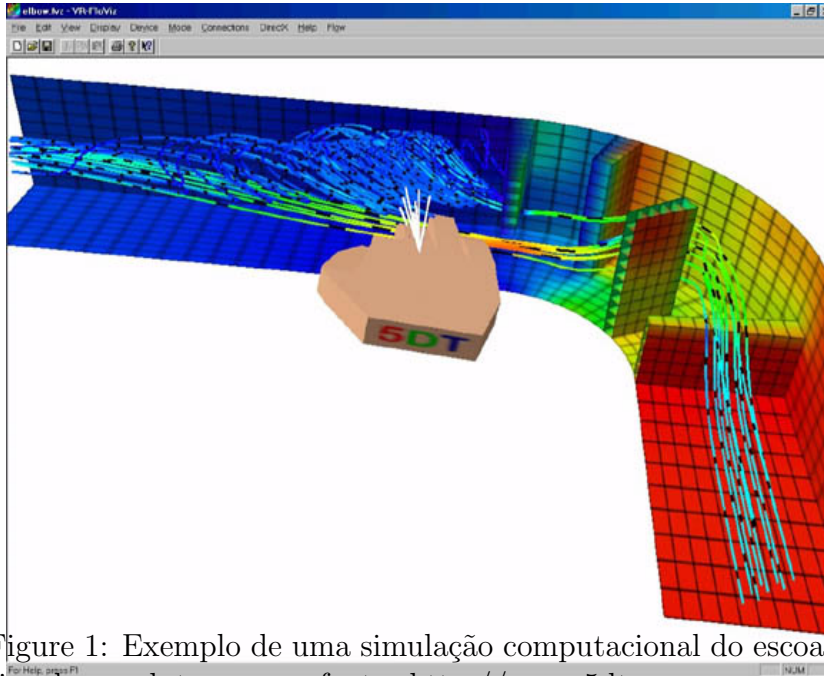


Figure 1: Exemplo de uma simulação computacional do escoamento no interior de um duto curvo - fonte: <http://www.5dt.com>

muito rica e complexa envolvendo diversos fenômenos em múltiplas escalas. Entender como este fluido complexo se comporta enquanto escoar na microcirculação é essencial para a detecção de doenças e possíveis curas. Estima-se que cerca de 80 % do esforço que o coração faz para bombear sangue pelo nosso corpo se destina a levar o sangue para regiões da microcirculação. Uma dieta não equilibrada combinada com um estilo de vida sedentário favorece o acúmulo de placas de gordura no interior das nossas artérias e isso leva a uma perda de pressão localmente muito grande, que sobrecarrega ainda mais o nosso coração. O fenômeno físico relacionado ao escoamento do sangue no interior da microcirculação atrai a atenção não só de engenheiros, mas também de matemáticos, físicos teóricos, médicos, biólogos, químicos, entre outros especialistas de diversas áreas das ciências naturais.

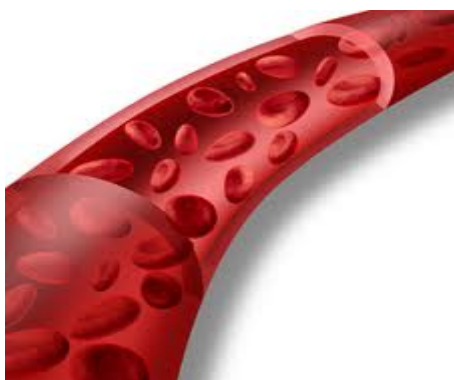


Figure 2: Ilustração esquemática do escoamento do sangue no interior de um vaso sanguíneo. Do ponto de vista da mecânica dos fluidos o sangue pode ser considerado como uma suspensão de plasma + hemácias, que constituem as maiores células do sistema circulatório

2 Solução analítica do escoamento na microcirculação para um modelo de célula simplificada

A fim de reforçar o aprendizado teórico sobre as escalas envolvidas num aproximação de descrição contínua da matéria, o aluno deverá resolver analiticamente um problema de interesse prático envolvendo escoamentos em tubos em escalas microscópicas. Este problema reforça a compreensão de que o conceito de um meio contínuo não passa de uma idealização.

O problema a ser resolvido consiste em um modelo simplificado do movimento de células na microcirculação. O sangue humano é composto de diversos componentes, entre eles: plasma, hemácias, plaquetas, leucócitos, etc. Do ponto de vista reológico o componente que mais influencia a variação da viscosidade do sangue é o que nós chamamos de hematócrito, que nada mais é do que a fração volumétrica de hemácias no sangue. Sendo assim, o nosso modelo simplificado de sangue consistirá numa suspensão de hemácias imersas em plasma (que é um fluido simples, muito parecido com a água, inclusive nos valores de viscosidade).

O hematócrito é definido como

$$\phi = \frac{V_c}{V_s}, \quad (1)$$

em que V_c consiste no volume total ocupado pelas células em uma amostra de sangue (nesse caso consideramos apenas hemácias, que são as maiores células

sanguíneas) e V_s é o volume total ocupado pelo sangue (composto de plasma + hemácias).

Considere as células com formato cilíndro, alinhadas em fila e separadas por uma distância igual na direção do escoamento, conforme ilustra a figura (3).

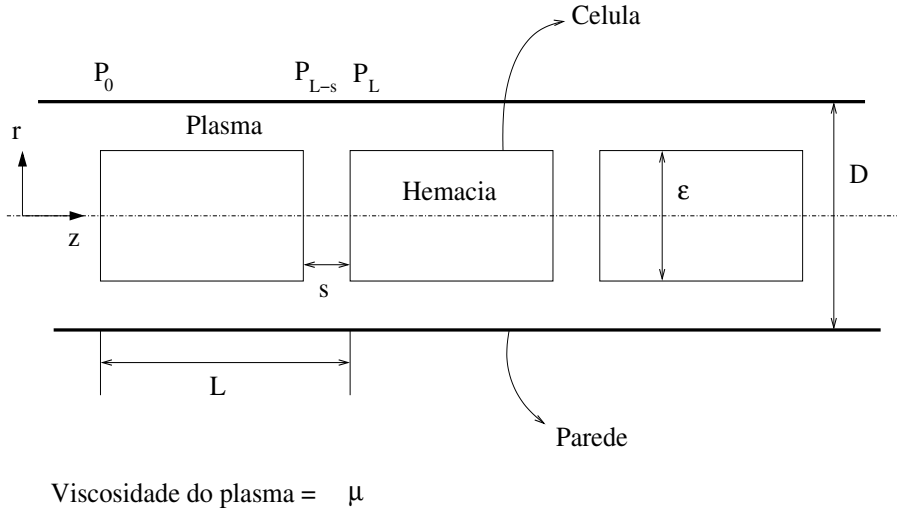


Figure 3: Ilustração esquemática do modelo de sangue na microcirculação considerada neste problema

Utilize a expressão para o balanço de momento linear em coordenadas cilíndricas no limite não inercial, aplicável para escoamentos em tubulações, dada por

$$\frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = -\frac{dp}{dz}r. \quad (2)$$

Considere as seguintes condições de contorno para o escoamento que se desenvolve entre a célula e a parede e entre células:

- Condições de contorno célula-parede

$$v_z(r = \varepsilon/2) = u_c$$

$$v_z(r = D/2) = 0$$

- Condições de contorno entre células (no espaçamento s preenchido apenas por plasma)

$$v_z(r = 0) = v_{z,max}$$

$$v_z(r = D/2) = 0$$

em que u_c representa a velocidade da célula. Nestas condições, mostre que

- (a) o hematócrito pode ser dado por

$$\phi = \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^2 \frac{L - s}{L} \quad (3)$$

- (b) o perfil de velocidade entre a célula e a parede pode ser expresso por

$$v_z(r) = \frac{1}{16\mu} \frac{dp}{dz} \left\{ 4r^2 - D^2 + \frac{(D^2 - \varepsilon^2)}{\ln(\varepsilon/D)} \ln\left(\frac{2r}{D}\right) \right\} + u_c \frac{\ln(2r/D)}{\ln(\varepsilon/D)} \quad (4)$$

- (c) o perfil de velocidade entre células pode ser expresso por

$$v_z(r) = \frac{1}{16\mu} \frac{dp}{dz} (4r^2 - D^2) \quad (5)$$

(d) integre o perfil de velocidades obtido na letra (b) entre a célula e a parede para obter a vazão volumétrica do plasma que atravessa essa região, para tanto considere que a célula encontra-se parada com $u_c = 0$. A vazão nesta região deve ser calculada por

$$Q_1 = \int_{\varepsilon/2}^{D/2} v_z(r) 2\pi r dr,$$

com $v_z(r)$ dado pela expressão obtida no item (b). Mostre que o resultado desta integração é dado por

$$Q_1 = \frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dz} \left\{ \frac{(D^4 - \varepsilon^4)}{16} - \frac{D^2(D^2 - \varepsilon^2)}{8} + \frac{(D^2 - \varepsilon^2)^2}{8 \ln(\varepsilon/D)} \left[\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) - \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (6)$$

(e) integre o perfil de velocidades obtido na letra (c) entre as células para obter a vazão volumétrica do plasma que atravessa essa região. A vazão nesta região deve ser calculada por

$$Q_2 = \int_0^{D/2} v_z(r) 2\pi r dr,$$

com $v_z(r)$ dado pela expressão obtida no item (c). Mostre que o resultado desta integração é dado por

$$Q_2 = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{D^4}{16} \right) \quad (7)$$

(f) mostre que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a equação (6) tende à equação (7).

(g) isole o termo referente ao gradiente de pressão da expressão obtida na equação (7) e integre este de $L - s$ até L para calcular a perda de pressão no trecho entre as células, você deverá obter como resultado a seguinte expressão:

$$\int_{L-s}^L \frac{dp}{dz} dz = \Delta p|_{L-s}^L = \frac{-128\mu Q_2 s}{\pi D^4} \quad (8)$$

(h) repita o mesmo procedimento para determinar a perda de pressão no trecho entre célula e parede e mostre que

$$\int_0^{L-s} \frac{dp}{dz} dz = \Delta p|_0^{L-s} = \frac{-8\mu Q_1 (L-s)}{\pi f(\varepsilon, D)} \quad (9)$$

com

$$f(\varepsilon, D) = -\left\{ \frac{(D^4 - \varepsilon^4)}{16} - \frac{D^2(D^2 - \varepsilon^2)}{8} + \frac{(D^2 - \varepsilon^2)^2}{8 \ln(\varepsilon/D)} \left[\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{D}\right) - \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (10)$$

(i) pelo princípio da conservação da massa, temos que para um fluido incompressível (líquidos de um modo em geral, como é o caso do plasma) $Q_1 = Q_2 = Q$, nesta condição mostre que a perda de pressão total entre 0 e L é dada por

$$\Delta p|_0^L = \Delta p|_0^{L-s} + \Delta p|_{L-s}^L = \frac{-128\mu Q}{\pi} \left[\frac{s}{D^4} + \frac{(L-s)}{16f(\varepsilon, D)} \right] \quad (11)$$

(j) a lei de Hagen-Poiseuille relaciona a perda de pressão com a vazão para um escoamento em regime laminar em uma tubulação e é expressa por

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{-128\mu Q}{\pi D^4}, \quad (12)$$

mostre, utilizando a equação (11) que por comparação direta com a lei de Hagen-Poiseuille, o sangue (plasma + hemácias) pode ser considerado um fluido contínuo equivalente com viscosidade efetiva μ_e dada por

$$\mu_e = \mu \left[\frac{s}{L} + \frac{D^4}{16f(\varepsilon, D)} \left(\frac{D}{\varepsilon} \right)^2 \phi \right] \quad (13)$$

em que μ é a viscosidade do plasma.

(k) Interprete esse resultado sob uma perspectiva da hipótese do contínuo. Pense nas seguintes perguntas-chaves para sua interpretação: A viscosidade é uma propriedade bulk? No caso do sangue a dinâmica coletiva das hemácias refletem em diferentes valores de viscosidade efetiva. E no caso de fluidos simples monofásicos? Quais são as hierarquias da microescala que determinam o comportamento de uma propriedade de transporte contínua? Como estabelecer as escalas dos fenômenos representativos responsáveis por definir uma propriedade contínua qualquer? Quando uma equação modela uma propriedade material ela está implicitamente descrevendo respostas observáveis de uma microestrutura particular de um dado material?