Transporte de Calor e Massa

Prof. Rafael Gabler Gontijo - UnB

Trabalho de Condução de Calor

Nesse trabalho você deverá desenvolver uma solução analítica para o problema de condução 2D em regime permanente sobre uma placa retangular aquecida pelos contornos. Sua solução deverá ser apresentada na forma de um relatório científico bem estruturado baseado nos itens que serão apresentados nesse roteiro. Seu trabalho será avaliado pela clareza na exposição das deduções, pelo capricho estético do documento entregue e por critérios subjetivos com base na comparação da estrutura de seu trabalho com a estrutura do trabalho de seus colegas. Esse roteiro contem um item opcional que poderá te ajudar a obter avaliação máxima nessa atividade.

A equação geral da condução de calor em regime transiente, bidimensional e sem geração interna é representada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

em que T é o campo de temperatura que no caso 2D é uma função $T(x, y)$. Um dos seus objetivos nesse trabalho consiste em realizar um estudo acerca dessa equação resolvendo-a analiticamente para um domínio retangular sujeito à condições de contorno bem definidas por meio da técnica de separação de variáveis. Para tanto você deverá seguir os passos abaixo. Mas antes é importante definirmos através de um desenho as condições de contorno nas quais você irá se basear para desenvolver a sua solução. Considere portanto o esquemático representado na figura (1).

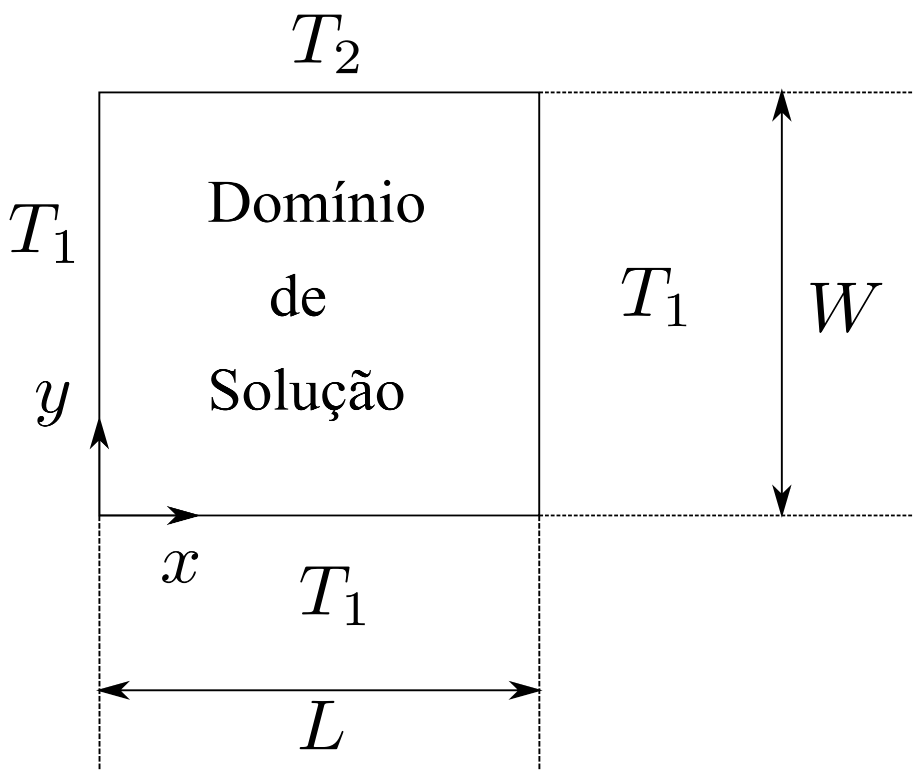

Figura 1: Esquemático com as condições de contorno do problema.

- a-) Considere a seguinte transformação de variáveis:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1},$$

utilizando essa transformação apresente a equação diferencial parcial a ser resolvida para θ juntamente com as condições de contorno do problema;

- b-) Vamos propor que a função $\theta(x,y)$ possa ser separada em termos de:

$$\theta(x,y) = X(x)Y(y),$$

mostre que essa equação diferencial parcial para θ recai em duas equações diferenciais ordinárias para $X(x)$ e $Y(y)$ e que essas possuem a seguinte forma:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + X\lambda^2 = 0$$

e

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - Y\lambda^2 = 0,$$

em que λ^2 é uma constante qualquer.

- c-) Mostre que as soluções das equações diferenciais ordinárias que surgiram no passo anterior levam a seguinte expressão para a solução geral do campo de $\theta(x,y)$:

$$\theta(x,y) = [C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)]\left(C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y}\right),$$

em que C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes de integração que deverão ser determinadas em função das condições de contorno do problema, formuladas por você no item a desse roteiro;

- d-) Aplicando as condições de contorno na lateral esquerda e na fronteira inferior do domínio de solução, mostre que $C_1 = 0$, $C_3 = -C_4$;

- e-) Aplique agora a condições de contorno na lateral direita do domínio e mostre que existem infinitos valores de λ que satisfazem essa equação e que estes estão relacionados pela seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \qquad \text{com} \qquad n = 1, 2, 3, ...\infty.$$

Justifique também porque não faria sentido físico considerar aqui $n = 0$;

- f-) Mostre que a expressão geral para a solução da função $\theta(x,y)$ é dada por:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}\right),$$

utilizando identidades que relacionem as funções expoenciais com funções trigonométricas hiperbólicas e chamando $2C_n^* = C_n$ mostre que:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right);$$

- g-) Você deve ter notado que a nossa solução até agora possui infinitas constantes C_n a serem determinadas. É evidente que não determinaremos uma por uma. Ao invés disso vamos precisar utilizar argumentos gerais matemáticos que nos viabilizem determinar todas essas infinitas constantes C_n de uma só vez. Para isso considere as seguintes definições.

"Duas funções $g_n(x)$ e $g_m(x)$ são ortogonais no domínio $a \leq x \leq b$ se:

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0; \qquad m \neq n."$$

"Qualquer função $f(x)$ pode ser expressa em termos de um somatório infinito de funções ortogonais por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x).$$

Multiplique a função $f(x)$ por $g_m(x)$, integre entre a e b e compare com a definição do que chamamos de função ortogonal para mostrar que:

$$A_m = \frac{\int_a^b f(x) g_m(x) dx}{\int_a^b g_m^2(x) dx}.$$

Mude apenas a nomenclatura de m para n e deixe registrado no seu processo dedutivo a seguinte relação:

$$A_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx}.$$

- h-) Considere agora a condição de contorno da parede superior. Mostre que a aplicação dessa condição de contorno leva a um contexto no qual as variáveis do item anterior se resumem à:

  $$f(x) = 1$$

  e

  $$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

  A partir dessa conclusão mostre que as infinitas constantes C_n são dadas por:

  $$C_n = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{2}{\pi \sinh(n\pi W/L)}$$

  e finalmente mostre que a solução analítica para esse problema é dada por:

  $$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

- i-) Até esse momento você resolveu a solução analítica para a distribuição de temperatura em uma placa retangular de dimensões $L \times W$ sujeita às condições de contorno especificadas na figura (1) desse roteiro. Você pode notar que a solução desse problema consiste numa série infinita. Para fins práticos vamos analisar a ordem de magnitude dos termos dessa série através de um exemplo concreto. Considere portanto os seguintes dados:

  - $L = W = 1$m
  - $T_1 = 0^oC$
  - $T_2 = 100^oC$
  - $y = 0.5$m

Com base nesses dados, confeccione uma tabela plotando os valores de cada um dos dez primeiros termos dessa série (variando n de 1 até 10) para 10 pontos ao longo de x (variando de 0 a 1 de 0.1 em 0.1 m).

- j-) Quais conclusões você pode obter a partir da tabela confeccionada no item anterior?

- k-) Finalmente, plote perfis horizontais de temperatura (dimensionais) $T(x)$ para seções com diferentes valores de y (a sua escolha) ao longo da placa para as condições definidas no item anterior (com exceção dos valores de y).

Bônus - Item opcional

- l-) Na aula número 4 do minicurso de Programação Científica em Fortran, disponível no canal do Youtube do Professor, é apresentado um código fonte capaz de resolver esse mesmo problema através de uma solução numérica por diferenças finitas. Compare os perfis de temperatura obtidos no item anterior com a solução numérica.